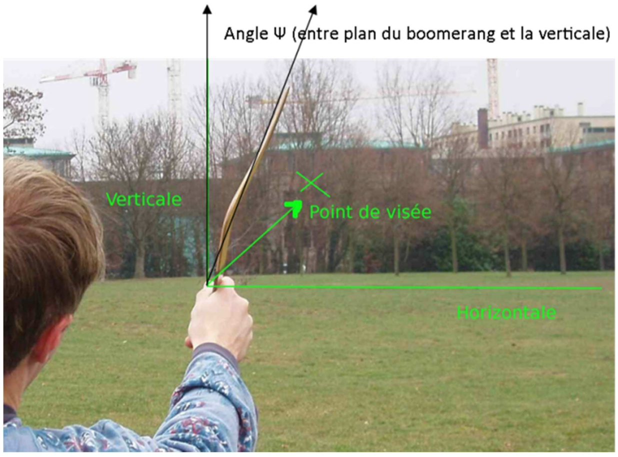
MODELISATION SIMPLE D'UN BOOMERANG by ouaouaron

I) ETUDE QUALITATIVE

A. Lancement d'un boomerang

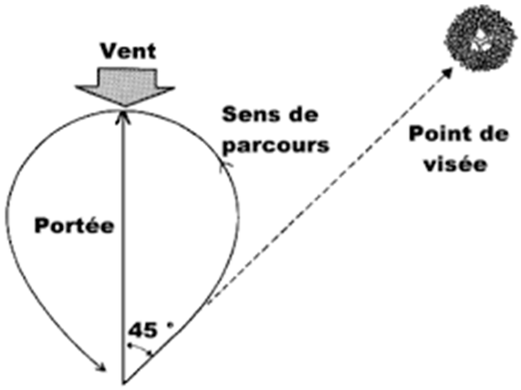
On tient dans la main l'extrémité du boomerang, face bombée du côté du visage. Un geste svelte du bras et du poignet permet le lancer à 20° ou 25° par rapport à l'horizontale (il faut bien que sa trajectoire soit un peu ascendante, avec **une inclinaison** ψ d'environ 10° à 15° maximum **par rapport à la verticale**.



Il est ainsi projeté à une vitesse longitudinale V et une vitesse de rotation ω

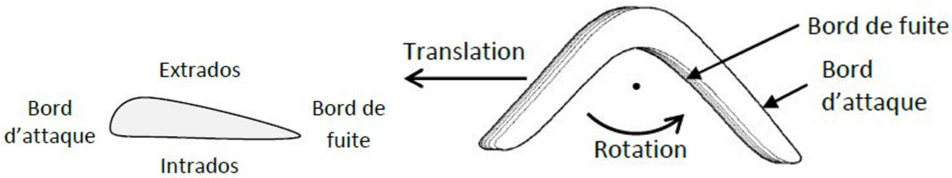
S'il est lancé correctement, il doit assurément revenir à son point de départ en décrivant une trajectoire presque circulaire (en forme de goutte d'eau).

La **portée** indiquée sur la figure est à peu près le diamètre du cercle horizontal approché parcouru.



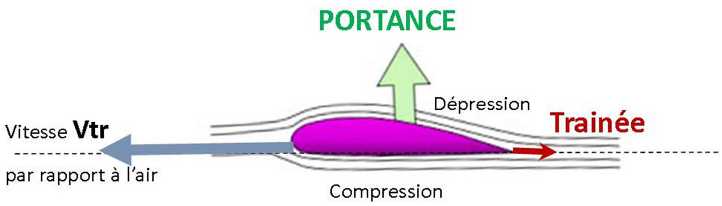
Si on lançait ainsi un vulgaire morceau de bois, il décrirait dans le plan vertical devant soi une simple courbe (parabolique en négligeant la résistance de l'air).
Pourquoi le boomerang peut-il revenir ? Nous allons tenter de l'expliquer d'abord par une étude, puis par quelques calculs.

B. Portance des pales

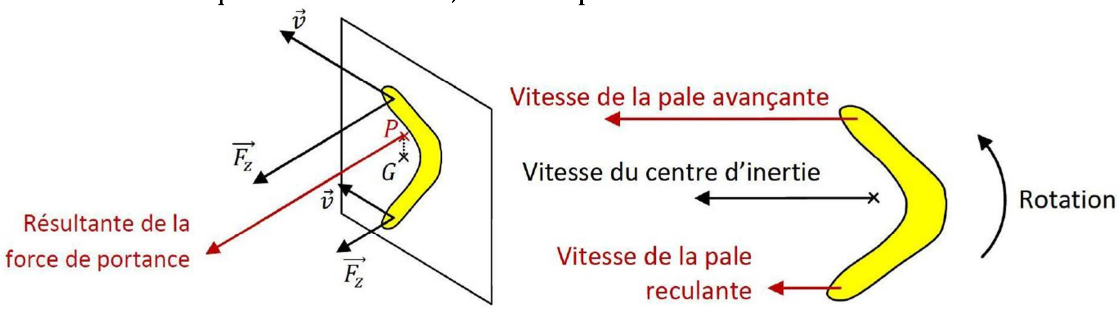


Une pale se comporte comme une aile d'avion. Ici, l'incidence reste voisine de 0, mais les deux côtés de la pale étant différents (intrados plat, et extrados arrondi), la dissymétrie d'écoulement de l'air provoque une force qui se décompose en une **force portante** (perpendiculaire à la pale) et une **force de trainée** dans le sens inverse de la vitesse.
Certains boomerang ont un profil symétrique, ils ont obligatoirement un vrillage des pales assurant une petite incidence. Sinon ce ne sont que des boomerangs de décoration !

Soit **Vtr** la composante transverse de la vitesse (par rapport à l'air), perpendiculaire au bord d'attaque de l'aile.
Le vent apparent résultant provoque une force de **portance** (perpendiculaire à l'aile côté bombé, et une force de **trainée)**.
Cette vitesse est en permanence une combinaison de la vitesse transversale V du boomerang et de sa vitesse de rotation ω. La portance augmente avec cette vitesse Vtr (proportionnelle à son carré ; on le verra plus tard).



On négligera, dans cette étude, l'effet de la trainée qui ne fait que ralentir le boomerang (en vitesse et en rotation). On ne s'intéresse qu'aux forces utiles, celles de portance **Fz**.

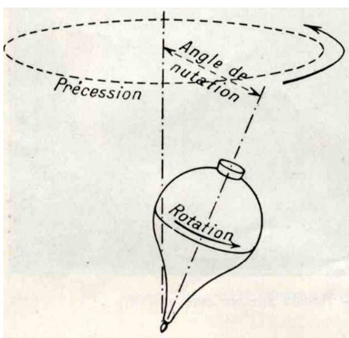


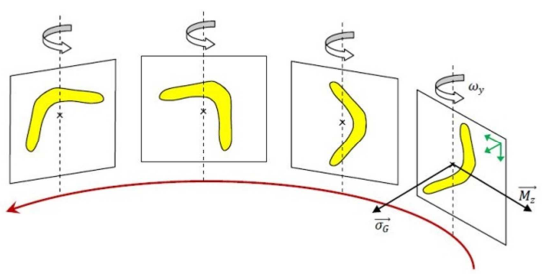
Du fait de la rotation du boomerang, la vitesse de la pale du haut (avançante) est plus grande que celle de la pale du bas reculante. La force Fz du haut est donc plus grande que la force Fz du bas. Le centre d'application de la force résultante n'est donc pas appliquée au centre de gravité G du boomerang, mais un peu plus haut, au point **P**. Il se créé donc un **couple** qui tend à faire **basculer horizontalement le boomerang** (à gauche ici).

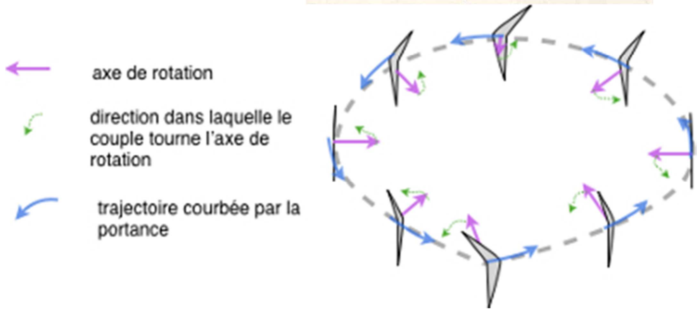
Ce n'est pas ce qui se passe en réalité ! Pourquoi ?

C. Effet gyroscopique

En raison de la rotation du boomerang, ce couple provoque au contraire une rotation lente de celui-ci dans le plan vertical, un peu comme une **toupie**.
Il va ainsi **décrire un cercle horizontal**, à une vitesse **Ω** (précession gyroscopique).



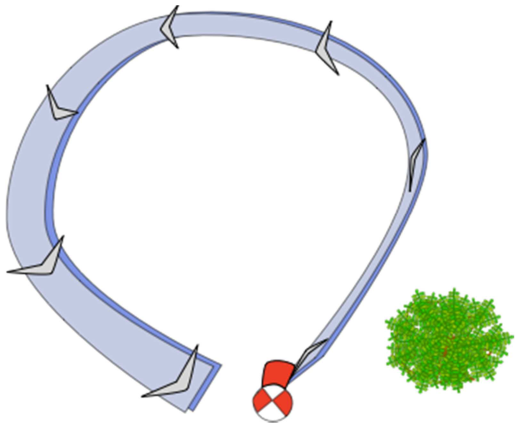




En même temps qu'une trajectoire ascendante et descendante, le boomerang a tendance à décrire un **cercle horizontal de rayon R** pour revenir au point de départ.
P = 2R se nomme la **portée** du Boomerang.

D. Vol réel

La trajectoire forme une sorte de 'goutte d'eau', légèrement ascendante et descendante, et revient au point départ si le lancer est réussi.

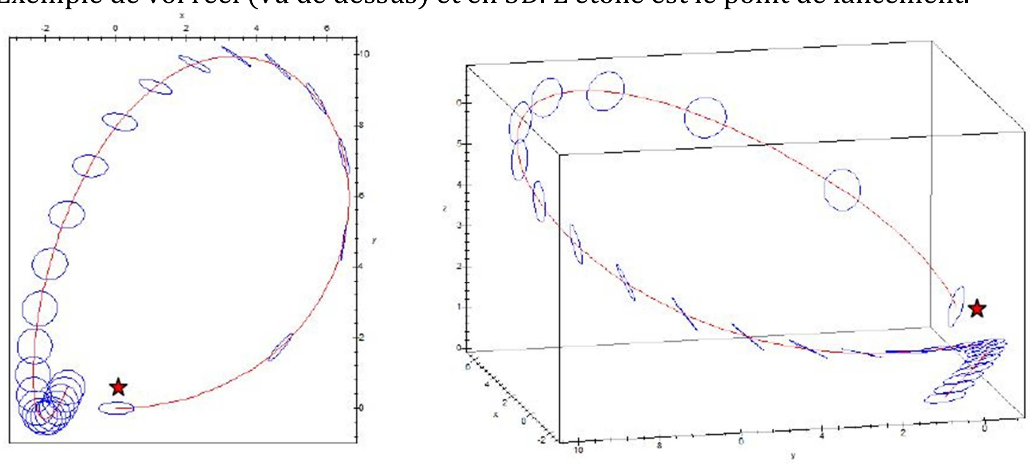


De plus, le boomerang **se couche petit à petit** et termine sa course bien moins verticalement qu'au départ.

La raison en est : l'air derrière le boomerang est devenu turbulent, et porte moins que devant. Les pales lorsqu'elles se trouvent à l'arrière ont ainsi une portance moindre. Le centre de gravité de la force résultante portante, se décale donc en avant du centre de gravité, d'où un couple vertical qui a tendance à faire coucher le boomerang (effet gyroscopique encore) !

TRES IMPORTANT : L'angle de lancer ψ par rapport à la verticale est **faible au début** (15°), mais augmente ensuite jusqu'à 40° ou même 50°.
Le lanceur ne peut pas trop changer ces valeurs.
Nous prendrons pour les calculs une **valeur moyenne** par exemple **30°**

Exemple de vol réel (vu de dessus) et en 3D. L'étoile est le point de lancement.



II) MODELISATION SIMPLIFIEE

La simulation tenant compte de tous les paramètres (ou presque) est assez laborieuse et ne peut se résoudre que par des méthodes numériques et de nombreuses équations.
Nous allons ici étudier, avec quelques approximations, le **mouvement projeté dans le plan horizontal,** en montrant qu'il est à peu près circulaire et en calculant quelques grandeurs physiques.

A. Portance

Si on suppose une tranche de pale de surface **dA** (profil non symétrique) se déplaçant (à incidence quasi nulle) perpendiculairement à une vitesse **Vtr**, la force de portance est donnée par :

$$dF_z = \frac{1}{2}\,\rho\,C_p\,dA\,\mathrm{Vtr}^2$$

Avec :

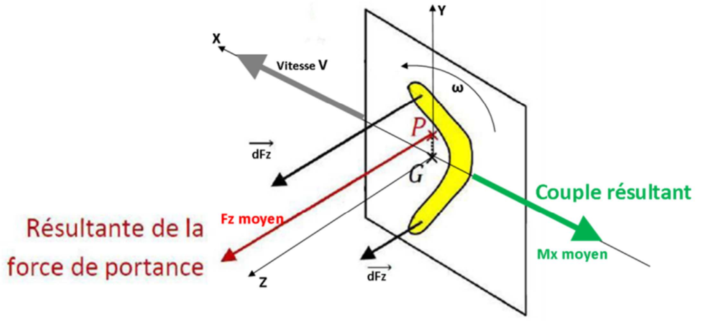
ρ = 1,2 kg/m3 masse volumique de l'air
Cp = 0.55 Coefficient dépendant du **profil de la pale**.

B. Moment de cette force

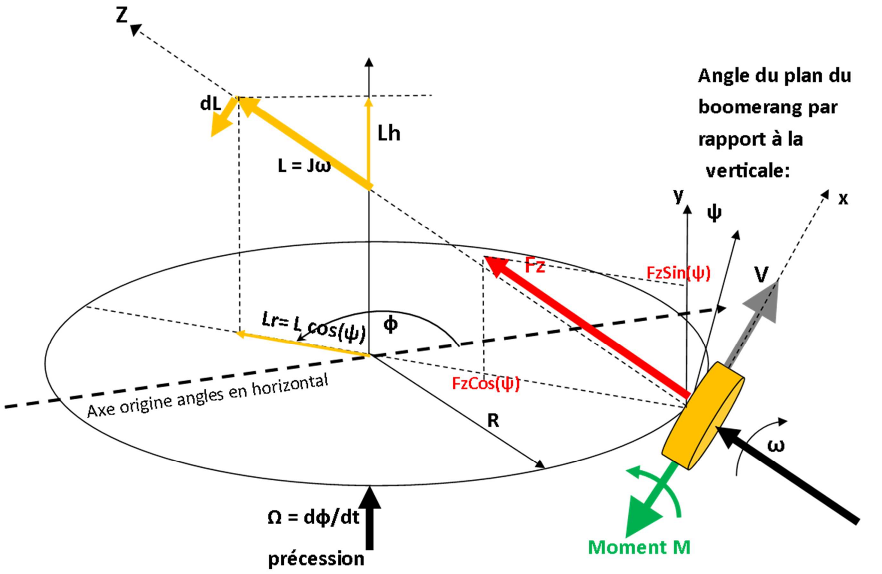
On a vu que la force portante moyenne était appliquée en P, situé au-dessus du centre de rotation et de gravité G. Elle crée ainsi un couple. Le moment moyen de ce couple résultant, par rapport à l'axe X, est :

$$\overrightarrow{\mathbf{Mmoyen}} = \overrightarrow{\mathbf{Mx\ moyen}}$$

(sens contraire à OX, règle du « tire-bouchon » pour dessiner le sens du vecteur).



C. Etude du mouvement projeté dans le plan horizontal



Le boomerang tourne autour de l'axe Z à une vitesse angulaire **ω** (vecteur dessiné, sens règle du « tirebouchon »)

Il possède donc un possède un <u>Moment d'Inertie</u> **J** autour de cet axe Z

On peut exprimer son <u>Moment Cinétique</u> par le vecteur :

$$\vec{L} = J\ \vec{\omega}$$

On supposera par la suite que cette expression de $\vec{L}$ reste toujours valable (ω restant très supérieur à d'autres vitesses de rotation sur d'autres axes).
On supposera aussi que les frottements sont nuls (trainée des pales négligeable), et que le boomerang reste dans un plan horizontal. : ω et V restent constants.

Théorème du Moment Cinétique:
La dérivée du Moment Cinétique par rapport au temps, est égale à la somme des moments appliqués.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

On peut écrire en coordonnées cylindriques :

$\vec{M}$ (0, -M, 0)

$\vec{L}$ ($L_r = L\cos(\psi)$, ϕ , L_h)

$\frac{d\vec{L}}{dt}$ (dL_r/dt, $L_r\, d\phi/dt$, dL_h/dt)

D'où : $dL_r/dt = 0$ $\quad$ $\mathbf{L_r\, d\phi/dt = -M}$ $\quad$ $dL_h/dt = 0$

L_r et L_h restent donc constants. C'est la présence de L_h qui prouve que le boomerang tourne aussi sur une trajectoire circulaire horizontale, de rayon R.
Comme $\Omega = d\phi/dt$ il vient : $L_r\, \Omega = M$ donc
$M = J\, \omega\, \Omega \cos(\psi)$ constant, donc Ω constant

Si le boomerang est bien lancé, à la <u>vitesse correcte</u> V et à la <u>bonne rotation</u> ω, il pourra parcourir ce cercle à la vitesse V, tel que $V = R\, \Omega$

D'où :

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{VJ\ \omega\ \cos(\psi)}}{\boldsymbol{M}}$$

III) Etude d'un boomerang 3 pales à 120°

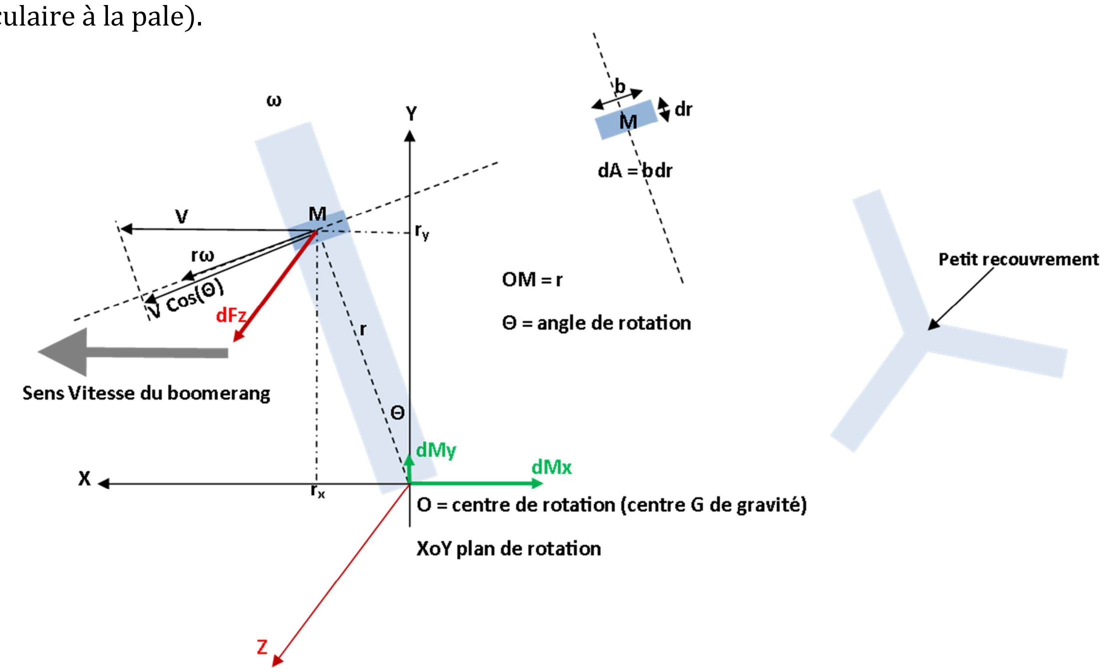
L'étude est plus facile sur des boomerangs à 3 ou 4 pales.

On **modélisera** une **pale** à l'aide d'un rectangle, de :
longueur a
largeur b
masse m/3 (m = masse totale du boomerang, sans lests supplémentaires)

A. Portance et Couple

1) Portance moyenne d'une pale (longueur a, largeur b)

Supposons notre pale, face bombée au-dessus, tournant dans le plan XOY autour du point O situé à l'une de ses extrémités. Elle avance en même temps à la vitesse V direction OX. L'axe OZ est perpendiculaire au plan du boomerang XOY.
La portion de pale de surface dA = bdr est soumise à chaque instant à une force dFz (sens axe OZ, perpendiculaire à la pale).



La pale tourne à une vitesse angulaire ω par rapport à O. Le profil d'aile dA se déplace donc à la vitesse rω perpendiculaire au rayon r = OM. L'angle Θ correspond à une position particulière de la pale. Cet angle varie de 0 à 2π pour un tour complet.
Comme la pale (ainsi que tout le boomerang) avance à la vitesse V, une composante de vitesse s'ajoute dans le même plan XOY, perpendiculaire à la pale, de valeur V cos(Θ)
L'élément de surface dA subit une force portante perpendiculaire au plan XOY de :
$dFz = \frac{1}{2}\,\rho\, Cp\, dA\, (r\omega + V\cos(\Theta))^2$
D'où : $dFz = \frac{1}{2}\,\rho\, Cp\, dA\, (r^2\omega^2 + V^2\cos^2(\Theta) + 2\, r\omega V\cos(\Theta))$
Cette force dépend de la position de la pale. Si on moyenne sur un tour complet, le second terme vaut 1/2 et le troisième est nul. D'où :
$dFzmoyen = \frac{1}{2}\,\rho\, Cp\, dA\, (r^2\omega^2 + V^2/2)$
Si on intègre sur toute la longueur de la pale, et avec dA = bdr :

$$Fzmoyen(1\ pale) = \tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{Cp}\,\mathrm{b}\int_0^a (r^2\,\omega^2 + V^2/2)\mathrm{dr} = 0{,}5\,\rho\,\mathrm{Cp}\,\mathrm{b}\,(\frac{a^3\,\omega^2}{3} + \frac{V^2}{2}\mathrm{a})$$

2) Moment résultant d'une pale

La force dFz précédente provoque des moments dMx et dMy par rapport respectivement aux axes OX et OY (couple).

Suivant OX : $dM_x = dFz\, r_y = ½\, \rho\, C_p\, dA\, (r\omega + V\cos(\Theta))^2\, r\cos(\Theta)$
Suivant OY : $dM_y = dFz\, r_x = ½\, \rho\, C_p\, dA\, (r\omega + V\cos(\Theta))^2\, r\sin(\Theta)$
Suivant OZ : dMz = 0 évidemment

$$dM_x = \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, dA\,(\, r^3\,\omega^2 \cos(\theta) + V^2\, r\ \cos(\theta)^3 + 2\, r^2\,\omega\, V\ \cos(\theta)^2\ )$$

$$dM_y = \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, dA\,(\, r^3\,\omega^2 \sin(\theta) + V^2\, r\cos(\theta)^2 \sin(\theta) + 2\, r^2\,\omega\, V\cos(\theta)\sin(\theta)\ )$$

Si on moyenne sur une période complète, seul le terme en $\cos(\Theta)^2$ n'est pas nul et vaut ½. Donc :

$$dM_x\ moyen = \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, dA\ r^2\,\omega\, V$$

$$dM_y\ moyen = 0$$

On intègre le long de la pale :

$$Mmoyen\ (1\ \text{pale}) = \int_{r=0}^{a} \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, b\, dr\ r^2\,\omega\, V\ = \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, b\,\omega\, V \int_0^a r^2\ dr = \frac{1}{6}\,\rho\, C_p\, b\,\omega\, V\, a^3$$

3) Portance et Moment pour 3 pales disposées en étoile par rapport à O

Les 3 pales à 120° se recouvrent légèrement au centre du boomerang. Une petite partie sera comptée trois fois, mais celle-ci influe peu, ce n'est donc pas gênant. La portance est donc multipliée par 3 et du fait de la symétrie, le moment moyen aussi.

$Fz = 1{,}5\,\rho\, Cp\, b\,(\frac{a^3\,\omega^2}{3} + \frac{V^2}{2} a)$ $M = \frac{1}{2}\,\rho\, C_p\, b\,\omega\, V\, a^3$ Vecteur Moment de Fz, axe OX, dans le sens inverse au sens de déplacement V.	Boomerang 3 pales

B. Moment d'inertie

Si on considère une pale comme une tige (car b <<a), le moment d'inertie par rapport à son extrémité (pale de longueur a, masse m/3 , m étant la masse totale du boomerang) vaut : 1/3 (m/3) a2 D'où la formule ci-contre pour trois pales :	Boomerang 3 pales $\boldsymbol{J = \frac{1}{3} m\, a^2}$

On verra plus tard le moyen de l'augmenter en ajoutant de petites masses aux extrémités des pales.

C. Rayon du cercle décrit par le boomerang, calcul par l'effet gyroscopique

D'après la formule vue précédemment : $R = \frac{V J\,\omega\cos(\psi)}{M}$ On obtient en remplaçant M :

$$R = \frac{2J\ \cos(\psi)}{\rho C_p b a^3}$$	Boomerang 3 pales, de moment d'inertie total J **Calcul par l'effet gyroscopique**

La formule précédente est surprenante : le rayon ne dépend ni de V ni de ω !! Pourtant il faut que le boomerang tourne et que V ne soit pas nul pour voler !
Le rayon dépend bien sûr de ψ, mais cos(ψ) reste autour de 0,86 pour l'angle moyen de 30°

CONCLUSION : **Le rayon**, donc **la portée , dépend principalement du boomerang lui-même** (forme, moment d'inertie..). A condition de voler avec une vitesse et une rotation correctes ! Sinon, il retombera au sol sans avoir effectué son tour complet. On voit que l'on peut facilement agrandir R en augmentant son moment d'inertie J.

On pourrait remplacer J par sa valeur pour 3 pales, et on écrirait : $R = \frac{2m\cos(\psi)}{3\rho C_p ba}$ Mais cette nouvelle formule donnerait l'impression que ce rayon dépend surtout de la masse du boomerang, ce qui est faux. Le plus important est le moment d'inertie que l'on peut augmenter aisément sans beaucoup modifier la masse (surface plus large aux extrémités, petites masses ajoutées). La formule précédente est préférable.

D. Rayon du cercle décrit par le boomerang, calcul par la force centrifuge

Tout le monde sait que si un objet de masse m tourne sur une trajectoire circulaire de rayon R, il existe une **force centripète** (la composante horizontale de Fz précédente, voir figure du II C.) qui équilibre la force centrifuge. On doit donc avoir : $F_z \cos(\psi) = mV^2/R$ (force centrifuge)
On peut ainsi calculer le rayon de cette façon, avec l'expression :

$R = \frac{mV^2}{F_z\cos(\psi)}$	Boomerang 3 pales, de masse m Calcul par la force centrifuge

R semble dépendre forcément de V ! Mais en fait c'est l'inverse. R dépend tout d'abord du Boomerang.

E. Les conditions de bon vol

1) Relation entre ω et V

Pour **que le boomerang reste bien sur sa trajectoire circulaire de précession** (due à son effet gyroscopique), les rayons R calculés avec les deux formules doivent être égaux !
Si on égale ces deux rayons, on obtient après quelques calculs :

$\omega = \frac{V}{a} \frac{\sqrt{\frac{ma^2}{J} - \frac{3}{2}\cos(\psi)^2}}{\cos(\psi)}$	Le bon coup de poignet !!! **m** masse totale **J** moment d'inertie

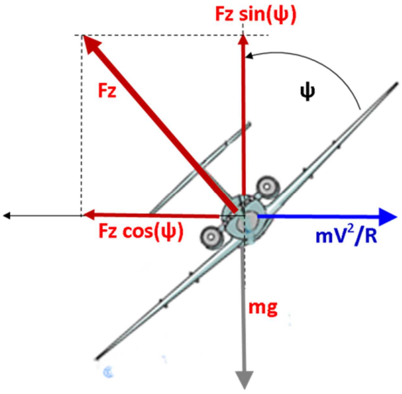
On voit aussi d'après cette formule, qu'augmenter le moment d'inertie sans trop changer m, permet non seulement d'avoir une plus grande portée, mais aussi de diminuer la vitesse de rotation nécessaire. Le boomerang devient ainsi plus facile à lancer. Ceci est très important pour le **réglage de celui-ci.**

2) Choix de la vitesse de lancer : V

V dépend de R (et non l'inverse !).
Si on veut calculer une valeur correcte au départ, la formule vue plus haut : $R = mV^2/ F_z \cos(\psi)$ donne bien V, mais elle n'est pas pratique, car elle fait intervenir Fz qui dépend aussi de ω !
Etude par l'avionique : un boomerang est comme un avion en virage (de rayon R) ! Et oui !
On peut supposer ce virage horizontal.

La portance verticale équilibre le poids :
$F_z\sin(\varphi) = mg$
La force centripète est sa composante horizontale : $F_z\cos(\varphi)$
Elle est équilibrée par la force centrifuge : mV^2/R
$F_z\cos(\varphi) = mV^2/R$

Si on fait le rapport, on obtient :



$$V = \sqrt{\frac{gR}{\tan\psi}}$$

D'où, en fonction du rayon désiré, un **ordre de grandeur correct** de la vitesse nécessaire de lancer au départ. Comme on n'est pas vraiment maître de ψ, **cette vitesse n'est liée qu'à R** !
(On rappelle que ψ est toujours faible au début, et augmente ensuite, et que l'on prend une valeur moyenne supposée constante de 30°)

Attention à cette formule : On pourrait penser encore ici que pour augmenter R, il suffit de lancer plus fort ! Comme nous l'avons vu précédemment, c'est faux !
La portée du boomerang dépend principalement de celui-ci. En fait, si on le lance plus fort, le boomerang ne pourra pas suivre le cercle dû à l'effet gyroscopique ! Donc il ne reviendra pas correctement. Il en est de même si la rotation initiale n'est pas bonne.

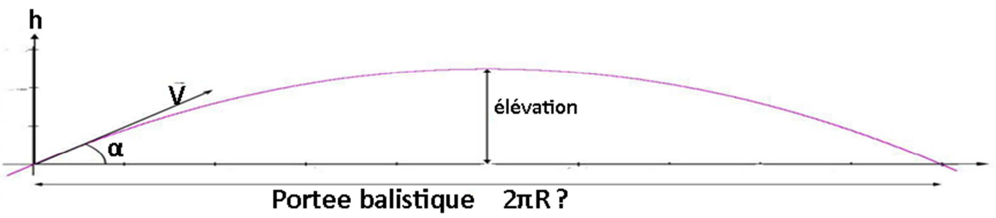
Et oui, le lancer d'un boomerang est tout un art et demande beaucoup d'entrainement pour pouvoir le rattraper !

3) Brève étude du comportement du boomerang dans le plan vertical

Intéressons-nous ici à l'évolution verticale du boomerang. Il est lancé sur une trajectoire ascendante (**α** = 20° environ avec l'horizontale). Il atteint à peu près son élévation maximale devant nous (1/2 circonférence), et doit retomber à nos pieds.
Si on néglige la résistance de l'air, et si on ne s'intéresse qu'à son mouvement vertical, le boomerang est soumis à la gravité (**mg**) et à une force de portance **Fzsin(ψ)**, constante, si on néglige l'effet d'inclinaison du boomerang qui augmente en réalité. On peut dire qu'il décrit une **parabole balistique.**

Pour une simple masse, on rappelle la portée d'une telle trajectoire : $\frac{V^2}{g}\sin(2\alpha)$

Donc mg devient mg - Fzsin(ψ)
C'est comme si **g** devenait **g - Fzsin(ψ)/m** (pesanteur moindre !).



Trajectoire du boomerang projetée sur une surface cylindrique de rayon R.

La portée balistique devient donc $\mathrm{Pb} = \frac{V^2}{g - \frac{Fzsin(\psi)}{m}}\sin(2\alpha)$

(c'est un ordre de grandeur, car le boomerang se couchant, la vraie portée sera plus élevée).

En théorie, elle doit rester **voisine de 2πR**

Ceci permet de voir, si on augmente trop ψ au moment du lancer (angle du boomerang par rapport à la verticale), que la pesanteur peut devenir négative. Le **boomerang peut s'envoler littéralement dans les airs** et retomber alors n'importe où ! Cela peut même devenir dangereux !

Si d'autre part on lance le boomerang presque vertical, il n'y aura pas de composante de portance vers le haut, et il retombera très vite à terre en amorçant juste sa rotation !

IV) Conclusion, ordre de l'étude à partir d'un boomerang donné

A. On possède un boomerang et on veut calculer ses caractéristiques de vol

Dans l'ordre :
- On calcule **sa portée** (le double du rayon) (formule obtenue par l'effet gyroscopique)
- On calcule une **vitesse V correcte de lancer** pour ce rayon R précédent (étude par l'avionique)
- On en déduit la **vitesse de rotation ω** qui correspond (relation entre ω et V).
- On peut calculer de nouveau le rayon obtenu (par l'autre formule, obtenue avec la force centrifuge). Les deux rayons obtenus doivent être voisins.

Pour améliorer le vol, on peut régler son boomerang !

B. Amélioration simple: lest des pales

On a vu que pour accroitre le rayon R de la trajectoire (donc la portée 2R) et en même temps la maniabilité (vitesse ω moindre), il faut **augmenter le moment d'inertie J** du boomerang (sans trop l'alourdir).
Ajouter un **petit lest** à **chaque pale,** est le procédé le plus simple, sans modifier totalement la forme du boomerang.
Sinon, il faudrait changer la forme des pales (plus larges aux extrémités par exemple). Les formules précédentes ne seraient plus valables. Une étude différente devrait alors être effectuée, en se servant de méthodes numériques. Réaliser un boomerang à partir d'un cahier des charges précis de performance reste du domaine des fabricants de boomerang de compétition !

On peut lester chaque pale du boomerang, au moyen d'une petite masse $\mathbf{m_1}$ (de quelques grammes) placée à l'extrémité de chacune d'elles.

Le moment d'inertie total devient : $\mathbf{J = J_0\ (initial) + 3m_1\, a^2 = \frac{1}{3}m_0\, a^2 + 3m_1 a^2}$
(a = longueur pale)

La masse totale devient : $\mathbf{m = m_0(initial) + 3m_1}$

Deux études possibles :

- Soit on essaie diverses masses m1, et on reprend les calculs précédents dans le même ordre à chaque fois.

- Soit on calcule la valeur de **m1 nécessaire** pour atteindre la **portée désirée (2R)** :

Pour un **rayon** de trajectoire **voulu R**, après quelques calculs, on peut obtenir la formule :

$$m_1 = \frac{R\rho C_p ba - 2\frac{m_0}{3}\cos(\psi)}{6\cos(\psi)}$$