Aide : longueur parabole

1) Pose du problème et simplification

Rappel de balistique : tir, pesanteur, sans résistance de l'air, courbe parabolique.

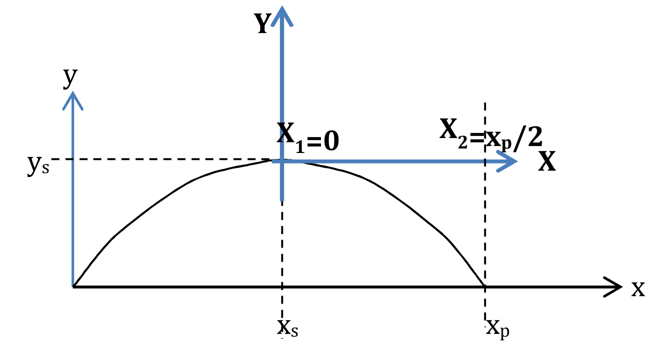
Dans le repère xy : $y = ax^2 + bx$

$$a = \frac{-g}{2{v_0}^2 cos^2(\alpha)}$$

$$b = tg(\alpha)$$

La portée horizontale vaut :

$$x_p = \frac{{v_0}^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{2{v_0}^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$



Pour simplifier l'équation parabolique générale de la trajectoire, on veut une équation dans le repère XY :
On pose : $X = x - x_s$ $Y = y - y_s$ (x_s et y_s sont les coordonnées du sommet dans le repère xy).

La **forme canonique** (utilisant son sommet) de la parabole est : $y = a(x - x_s)^2 + y(x_s)$
L'équation dans le repère XY est donc : $\boldsymbol{Y = a(X)^2}$
La **demi-longueur** correspondra à **$X = x_p/2$**

2) Longueur d'une parabole quelconque

Soit une parabole $y = ax^2 + bx + c$

Soit dl un élément de longueur d'un arc quelconque, il vient $dl^2 = dx^2 + dy^2$ d'où : $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
Or en dérivant y, dy = (2ax+b)dx d'où $dl = \sqrt{dx^2 + (2ax+b)^2\, dx^2}$ et $dl = dx\sqrt{1 + (2ax+b)^2}$

D'où la **longueur d'une parabole** entre deux points d'abscisse **x_1 et x_2** s'exprime par :
$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (2ax+b)^2}\, dx$

Il faut trouver une primitive de $\sqrt{1 + (2ax+b)^2}$
On fait le changement de variable : z = 2ax+b d'où : $\boldsymbol{L = \frac{1}{2a}\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + z^2}\, dz}$ avec $z_1=2ax_1+b$ et $z_2=2ax_2+b$

Il faut donc trouver une primitive F(z) de $f(z) = \sqrt{1+z^2}$ *soit* $\boldsymbol{F(z) = \int \sqrt{1 + z^2}\, dz}$
On intègre par partie en posant u = $\sqrt{1+z^2}$ et v' = 1
$\int uv' = uv - \int u'v$ donne : $F(z) = z\sqrt{1+z^2} - \int \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}} dz$
Astuce suprême : on ajoute et on retranche 1 au numérateur de l'intégrande : $z^2 = z^2 + 1 - 1$
Il vient : $\boldsymbol{F(z)} = z\sqrt{1+z^2} - \int \frac{z^2+1-1}{\sqrt{1+z^2}} dz = z\sqrt{1+z^2} - \boldsymbol{\int \sqrt{1+z^2}\, dz} + \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz$
D'où $\boldsymbol{2F(z)} = z\sqrt{1+z^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz$ la dernière intégrale est dans les tables :
$2F(z) = z\sqrt{1+z^2} + argsh(z)$
D'où, en utilisant une autre écriture de argsh :

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2} + Ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) \right)$$

D'où la longueur L de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ **entre x_1 et x_2 :**

$$L = \frac{1}{2a}\left(F(z_2) - F(z_1) \right) \quad \text{avec} \quad z_2=2ax_2+b \quad z_1=2ax_1+b$$

3) Application dans notre cas : **Y=aX²**

On calcule ici **L/2** entre $\mathbf{X_1=0}$ et $\mathbf{X_2 = x_p/2}$ = portée/2 = $\frac{1}{2}\frac{2{v_0}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{{v_0}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$

Comme b = 0 z1 = 2aX1=0 et z2 = 2aX_2 = -sin(α)/cos(α)

$F(z_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(\alpha)}{cos^2(\alpha)} + \; Ln\left(\frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) \right)$

$F(z_1) = 0$

$L/2 = \frac{1}{2a}\left(F(z_2) - F(z_1) \right)$

Il vient enfin après 2 lignes de calcul :

$$\boldsymbol{L = \frac{{v_0}^2}{g}\left(\sin(\alpha) - cos^2(\alpha)\, Ln\left(\frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) \right)}$$

Recherche de L maximale :

Pour trouver L maximale, on peut dériver L et écrire que L'=0, mais l'équation obtenue ne se résout pas analytiquement.

Au vu de la précision demandée, on peut utiliser un **tableau excel** calculant L pour différentes valeurs de l'angle α (méthode d'encadrements successifs), recherchant un maximum de L.

On commence par exemple avec α = 30°, puis des pas de 1°. On observe sur 3 valeurs α_1 α_2 α_3 un passage de L au maximum (donc pour α_2).

On continue avec α = α_2 puis des pas de 0,1°. On trouve alors 3 nouvelles valeurs α_1 α_2 α_3 avec un maximum de L pour ce nouvel α_2

Et encore une fois avec des pas de 0,01° pour assurer la précision de 0,1° demandée au plus près.