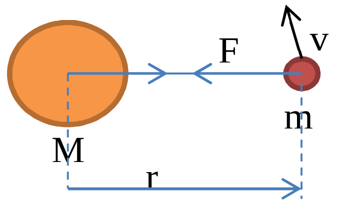
PETIT MANUEL DE NAVIGATION SPATIALE by ouaouaron

I) Lois de la gravitation entre deux corps

A. Attraction entre deux corps de masse M et m, séparés par une distance r (entre le centre des masses)

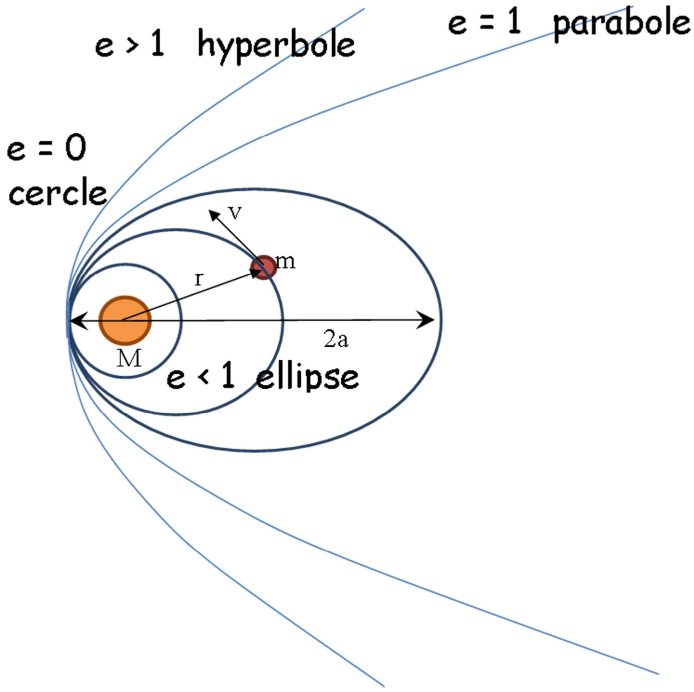


$$\boldsymbol{F} = \frac{-\boldsymbol{GMm}}{\boldsymbol{r^2}}$$

G = constante gravitationnelle ($m^3kg^{-1}s^{-2}$)
GM dépend de chaque astre considéré
GM = K = paramètre gravitationnel (km^3s^{-2})
v = vitesse de m par rapport au centre de M
r = distance de m par rapport au centre de M

B. D'après les deux premières lois de Kepler

Si on suppose la masse M bien plus grande que m. En prenant **pour repère le centre de M**, la masse m décrit une courbe appelée **« conique »** d'équation générale en coordonnées polaires : $r = \frac{a(1-e^2)}{e\cos\theta+1}$



Selon la valeur de e (excentricité) on a les 3 types de coniques ci-contre.

Si M est le soleil, le repère est héliocentrique.

Si M est la terre, le repère est géocentrique.

La vitesse **V** de la masse **m** sur sa trajectoire est fournie par la relation très importante :

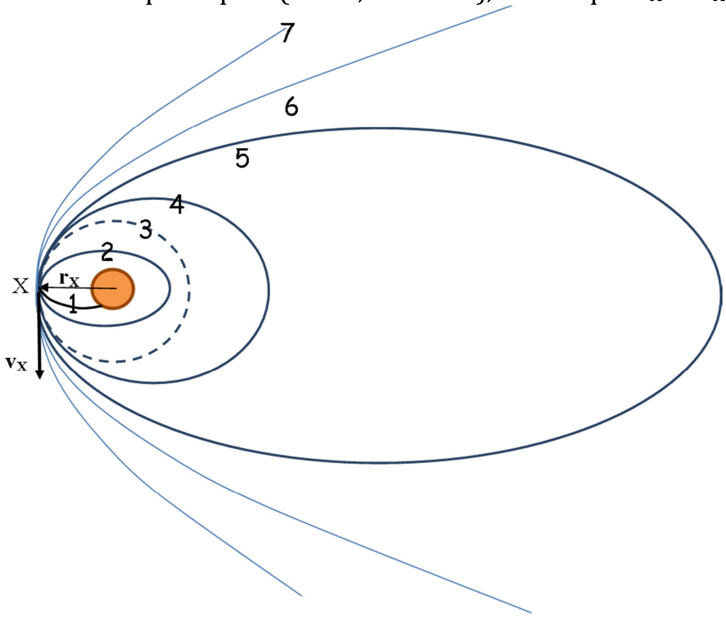
$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{K}\left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\right)}$$

Si **a > 0** C'est une **Ellipse**, dont **a** est le **demi grand axe**
Si **a = r** C'est un **Cercle**, dont a est le rayon
Si a = ∞ C'est une Parabole, sorte d'ellipse infinie, cas limite
Si **a < 0** C'est une **hyperbole**

La distance **r** est toujours celle entre **les centres de chaque masse.**

II) Les différents types de trajectoires

Supposons un objet spatial se trouvant au point **X**, avec une vitesse **v_X** et une distance **r_X** par rapport au centre de la masse principale (Soleil, ou Astre), et tels que v_X et r_X soient perpendiculaires.



On peut tirer le paramètre *a* de la formule précédente et écrire en X: $a = \dfrac{K}{2\frac{K}{r_X} - v_X^2}$

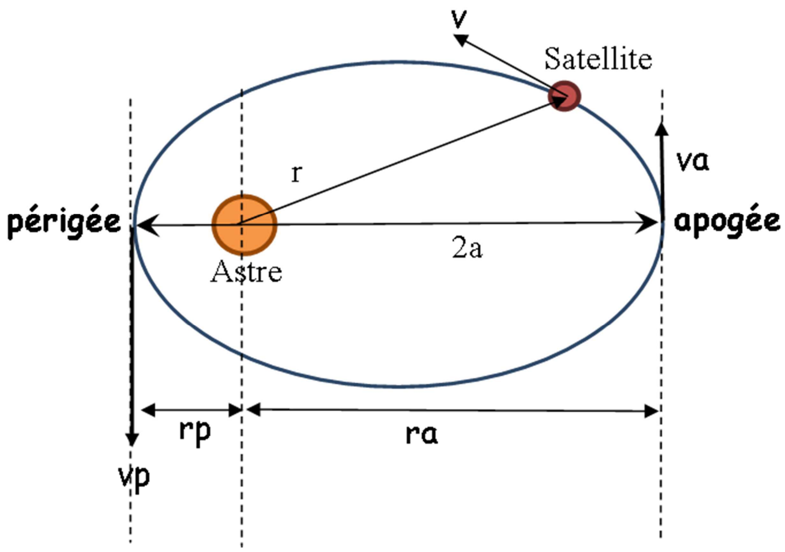
Les courbes de 1 à 7 sont par ordre croissant de v_X

1 l'objet va percuter l'astre
2 Ellipse, r_X <u>valeur max</u> du rayon
3 Trajectoire circulaire : $r_X = a$
4 Ellipse, r_X <u>valeur min</u> du rayon
5 Ellipse, rX <u>valeur min</u> du rayon
6 Parabole (cas limite, a = ∞)
7 Hyperbole, a < 0

A. a > 0 Trajectoires, orbites elliptiques

Ce sont celles des planètes autour du soleil (bien qu'on puisse souvent les considérer comme circulaires), des satellites autour des planètes, des comètes périodiques…

Périgée et apogée



Périgée : passage au plus près de l'astre, vitesse **vp**

Apogée : passage au plus loin de l'astre, vitesse **va**

rp et **ra** sont les valeurs de r en ces deux points

a = Demi grand axe de l'ellipse

2a = **grand axe de l'ellipse**

ra = 2a – rp

Remarque : Périgée et apogée peuvent s'inverser : le point X de la figure en début de page est l'apogée pour la courbe 2, il devient le périgée pour les courbes 4 et 5

D'après la Seconde loi de Kepler :

Comme en ces deux points, r et p sont perpendiculaires, On peut écrire : rp.vp = ra.va

La vitesse est maximale au périgée, minimale à l'apogée. Elle est perpendiculaire au rayon vecteur r seulement en ces deux points.

Si on connait la **vitesse au périgée** $\boldsymbol{v_p}$ et la **distance** $\boldsymbol{r_p}$ correspondante, on peut en déduire les caractéristiques de l'ellipse :

La formule générale de v donne au périgée :
$v_p^2 = \frac{2K}{r_p} - \frac{K}{a}$ et donc

Demi grand axe : $\boldsymbol{a = \frac{K}{2\frac{K}{r_p} - v_p^2}}$

Apogée : $\boldsymbol{r_a = 2a - r_p}$

Vitesse minimale, apogée : $\boldsymbol{v_a = \frac{r_p . v_p}{2a - r_p}}$

Les formules sont identiques avec au départ les vitesses et distances à l'apogée, il suffit d'échanger les indices p et a.

Période de révolution : $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{K}}$ (Troisième loi de Kepler, non démontré ici).

B. a= r Trajectoires, orbites circulaires

C'est un cas particulier d'ellipse ou : a = r = ra = rp

$v^2 = \frac{2K}{r} - \frac{K}{a}$ donne : $\boldsymbol{v_{oc} = \sqrt{\frac{K}{r}}}$ vitesse sur **orbite circulaire**

Attention : r = distance entre le centre de l'astre et le satellite
r = Rayon de l'astre + Altitude du satellite

Exemples : on assimile souvent la trajectoire des planètes à des trajectoires circulaires autour du soleil.
Il en est de même pour l'orbite de la station spatiale internationale SSI.
Autres cas : satellites à orbites circulaires, satellites géostationnaires.

C. a = ∞ Trajectoires paraboliques (cas théorique limite)

Si **a** devient infini pour $\boldsymbol{v_p = \sqrt{\frac{2K}{r_p}}}$ au périgée

On peut considérer cette trajectoire comme une **ellipse de grand axe infini** !

A l'infini (r = ∞, c'est-à-dire quand la force de gravitation de M devient négligeable):

$\boldsymbol{V_\infty = \sqrt{K(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})} = 0}$

<u>Signification physique</u> : la trajectoire de part et d'autre de l'astre s'éloigne à l'infini, et la vitesse devient alors nulle. On est à la limite de quitter l'attraction de l'astre ou d'y revenir. <u>C'est un cas limite qui n'existe pas</u> : l'objet pourrait rester immobile très loin de l'astre.

D. a < 0 Trajectoires hyperboliques

Si on augmente encore la vitesse vp au périgée**, a devient négatif**, et sans signification. La trajectoire est hyperbolique.

A l'infini (r = ∞, c'est-à-dire quand la force de gravitation de M devient négligeable, c'est-à-dire en dehors de l'attraction de l'astre):

$$\boldsymbol{V_\infty} = \sqrt{\boldsymbol{K}(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{r_\infty}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}})} = \sqrt{\boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{-a}}} = \text{valeur constante}$$

<u>Signification physique</u> : la trajectoire de part et d'autre de l'astre s'éloigne aussi à l'infini**,** et la vitesse devient constante. **On quitte ou bien on revient vers l'attraction de l'astre.**

- Cette trajectoire débute et termine un voyage interplanétaire.

Si on part d'une altitude H d'une planète de rayon R avec une vitesse initiale Vi
On pourrait montrer (avec la conservation de l'énergie mécanique) qu'**en dehors de l'attraction de la planète**, on a une vitesse constante :

$$\boldsymbol{V_\infty} = \sqrt{\boldsymbol{Vi^2} - \frac{\boldsymbol{Vlib^2}}{\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{R}}}}$$

Vlib étant la vitesse de libération de la planète à sa surface (voir ci-dessous).

- C'est aussi le cas de cas des trajectoires des comètes qui ne viennent qu'une fois nous rendre visite dans le système solaire. Celles-ci viennent de l'au-delà du système solaire et y retournent !

III) *Vitesse* de libération

C'est le cas de la trajectoire parabolique qui est la limite entre une trajectoire elliptique (on reste satellisé autour de la planète) et une trajectoire hyperbolique (on quitte son attraction).

Dans ce cas **a = ∞**, et donc à une distance r : $\boldsymbol{vlib} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2K}}{\boldsymbol{r}}}$

On la définit à la **surface** d'un astre **de rayon R** par : $\boldsymbol{vlib\_astre} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2K}}{\boldsymbol{R}}}$

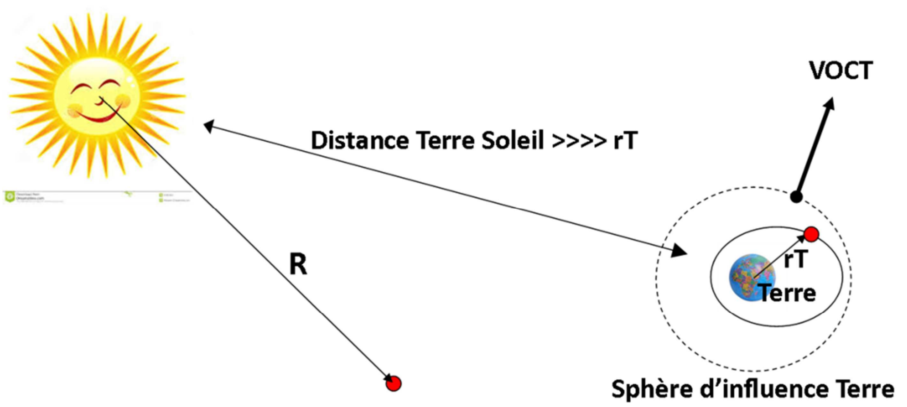
IV) Cas de plusieurs corps attractifs. Simplification d'étude par la sphère d'influence

Dans tout ce qui suit, on notera les grandeurs physiques avec :
Petites lettres (v, voc, a, r, rp, ra) **variables** par rapport à une **planète**
Grandes lettres (V,VOC, A, R,RP,RA) **variables** par rapport au **soleil**
Grandes lettres pour l'**astre** considéré : T (Terre) M (Mars)
Grandes lettres pour des **grandeurs fixes** (rayon des astres, valeur de K…)
Exemples :
voc**T** vitesse sur orbite circulaire autour de la **terre**
VOC**T** vitesse (supposée circulaire) de la **terre** autour du soleil
RM rayon Mars
KS paramètre de gravitation Soleil

On a désigné par « **à l'infini**, ou **à une distance infinie** » une distance assez grande pour que la force d'attraction de l'astre étudié devienne négligeable par rapport à une autre.
Cette limite se nomme **sphère d'influence**. C'est une sorte de bulle autour de l'astre.

Exemple : Terre et Soleil
A l'intérieur de la sphère d'influence de la terre (masse M_T), son attraction est prépondérante. On peut alors se limiter à l'étude de la gravitation autour de la terre, paramètre de gravitation **KT**, distance **rT**

Au-delà, l'attraction du soleil (masse M_S) devient prépondérante. On étudiera alors une orbite autour du soleil. Nouveau paramètre de gravitation **KS distance au soleil, R**

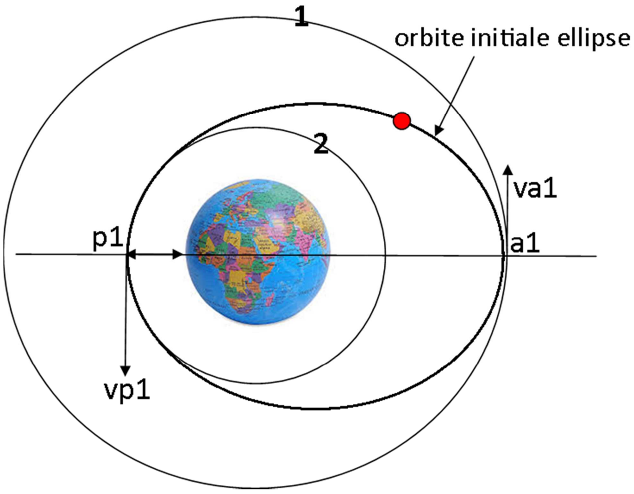


Remarque : toute la sphère d'influence de la terre, ainsi que celle-ci tourne autour du soleil : vitesse **VOCT**

L'étude au moyen des sphères d'influences permet une bonne approche de la navigation.
Nous utiliserons cette méthode dans l'exercice de **voyage interplanétaire**.

Remarque : les dessins montrant la sphère d'influence ne sont pas à l'échelle. Le diamètre de cette sphère est bien plus grand, tout en restant très inférieur aux distances entre le soleil et l'astre considéré.

V) Passage d’une orbite elliptique à une orbite circulaire



Soit un vaisseau spatial initialement placé sur une trajectoire initiale elliptique (périgée p1, apogée a1) Il suffit d’effectuer de petits changements de vitesse correctement dosés pour changer d’orbite :

DEUX POSSIBILITES:

A l’apogée a1, si on **accélère** un peu, on peut prendre l’orbite **1** (ici circulaire).

Au **périgée p1**, si on **ralentit** un peu, on peut prendre l’orbite **2 (plus petite).**

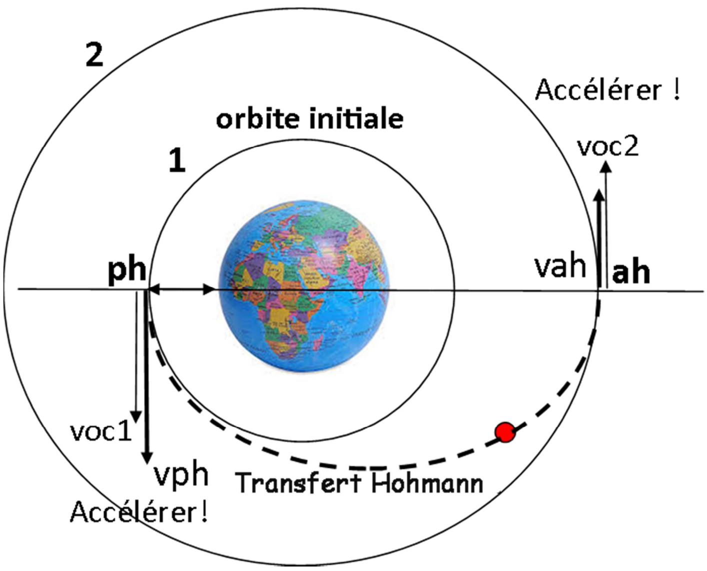
VI) Transfert de Hohmann

Il permet, en utilisant le moins de carburant possible:

- De changer d’orbite circulaire autour d’une planète.
- De faire un voyage interplanétaire pour rejoindre un autre astre : une fois lancé sur cette ellipse de « voyage », on peut aller très loin sans consommer aucun carburant !

Dans tous les cas (aller ou retour), on effectue une augmentation (ou une diminution) de vitesse pour voyager sur une orbite qui sera tangente de l’autre coté à l’orbite voulue. Une augmentation (ou diminution) de vitesse sera de nouveau nécessaire pour rester sur l’orbite finale.
Remarque : **freiner** comme **accélérer** dans le vide ne peuvent se faire simplement **qu’en consommant du carburant**. Le freinage automatique par approche de l’atmosphère d’une planète est bien trop complexe et ne sera pas étudié ici !

A. Changement d’orbite circulaire: passage de l’orbite 1 à 2



Orbite 1, intérieure, vitesse circulaire **voc1**
Orbite 2, extérieure, vitesse circulaire **voc2**

L’ellipse de Hohmann permettant de passer de 1 vers 2, a pour périgée **ph**, et apogée **ah**. On peut en déduire **vph** et **vah**

En ph, on **accélère** de voc1 à vph pour quitter l’orbite 1 et démarrer le « transfert de Hohmann ».

En ah on **accélère** encore (de vah à voc2) pour passer sur l’orbite 2.

La **durée de transfert** est facile à calculer, elle vaut la moitié de la période T de révolution sur l’ellipse de Hohman. Voir II A)

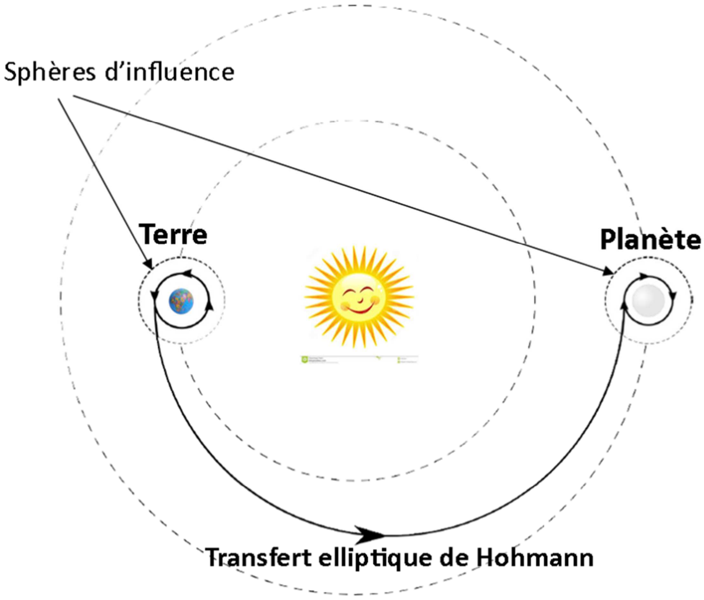
Le passage inverse (2 vers 1) s’étudierait de la même façon. Même ellipse Hohmann, mais on partitait de son apogée, et on ralentirait ! On ralentirait aussi en arrivant à son périgée.

C’est une technique très utilisée pour les **rendez-vous dans l’espace** (la synchronisation temporelle, c’est-à-dire à quel instant débuter la manœuvre, étant facile à calculer et à réaliser, car on connait le temps de transfert et les vitesses constantes sur les orbites circulaires). Non étudié ici.

B. Voyage interplanétaire

Toutes les planètes du système solaire décrivent des orbites rétrogrades situées dans un **même plan.**
On supposera dans cette étude que leurs orbites sont circulaires (ce qui se justifie en première approximation).

Le vaisseau débute son voyage à partir d'une orbite autour de la terre.



Etape 1 : **Accélérer pour quitter l'attraction de la terre** par une trajectoire **hyperbolique**

Etape 2 : en dehors des Sphères d'influence des planètes, **transfert sur une orbite elliptique d'Hohmann autour du soleil.**

Etape 3 : Dès l'entrée dans la sphère d'influence de la planète, la **trajectoire est forcément hyperbolique** (par rapport à celle-ci, on vient de l'infini à vitesse non nulle !).

Etape 4 : Accélérer ou freiner pour se **mettre en orbite** autour de la planète.

C'est magique ! Il n'y a que **DEUX MANOEUVRES IMPORTANTES** à effectuer qui demandent du carburant. Entre les deux, le vaisseau avance tout seul grâce à la gravitation autour du soleil. On pourrait aller ainsi vers les planètes les plus lointaines du système solaire !

En pratique, plusieurs petits ajustements sont évidemment nécessaires pour bien se positionner !

Remarques, depuis la terre :
Pour partir vers une planète plus éloignée du soleil, il faut augmenter sa vitesse initiale par rapport à lui.
Pour partir vers une planète plus proche du soleil, il faut diminuer sa vitesse initiale par rapport à lui.

Dans les deux cas, **on s'aide de la vitesse de rotation autour de la terre** (en surface, ou déjà en orbite). Et on lance le vaisseau dans le bon sens !!!

VII) Quantité de carburant nécessaire aux accélérations et freinages

On n'étudie pas ici le moteur de lancement de la fusée, mais seulement le **moteur de manœuvre** (accélération, freinage, orientation) de la navette spatiale dans le vide.
Les manœuvres d'orientation et d'alignement précis consommant très peu par rapport à celles de changement de vitesse, on les néglige dans la consommation de carburant.

D'autre part, modifier brusquement une direction de trajectoire consommerait beaucoup plus d'énergie et serait très difficile à réaliser, on ne fait donc qu'accélérer et freiner, en laissant la gravité faire le reste !

mtot = masse totale initiale du véhicule (carburant compris)
mc = masse initiale de carburant embarqué
U = impulsion spécifique du carburant utilisé (vitesse d'éjection des gaz en km/s)

Dv = variation de vitesse à effectuer
mi = masse totale véhicule avant cette variation. **La première fois : mi = mtot**
mf = masse totale du véhicule après.
Dm = mi - mf (variation de masse, donc **diminution de carburant**)
cr = carburant résiduel

On peut montrer que pour un changement de vitesse : $Dv = U\ L_n \frac{mi}{mf}$ (Ln est le log népérien)

Un petit calcul simple donne alors :

Variation de carburant : $Dm = mi\ \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{|Dv|}{U}}}\right)$

Carburant résiduel : cr = mc - Dm

Remarque : cr doit rester < mc !!!!! Sinon, le vaisseau reste livré à lui-même dans la gravitation !

Généralement, les moteurs sont allumés pendant 10 à 20 minutes à chaque fois pour effectuer la variation de vitesse nécessaire**. On consomme évidemment autant pour accélérer que pour freiner** (on est dans le vide !).

ATTENTION : A un second Dv, le mi devient mtot – Dm (du premier) etc….

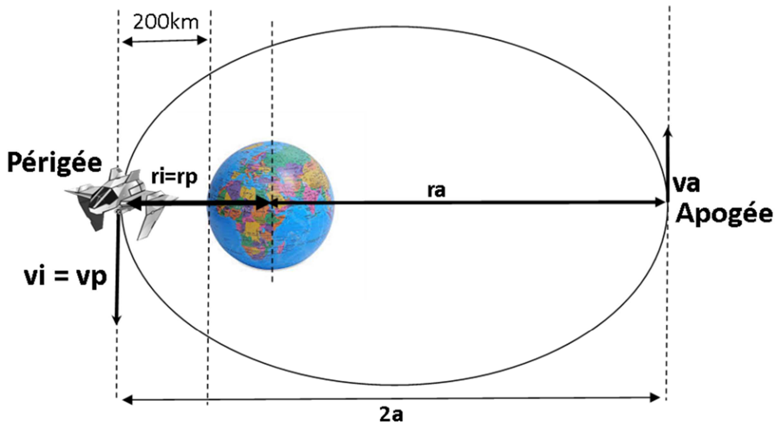
VIII) Exercices d'entrainement

A. Valeurs numériques à utiliser

// **Station Spatiale Internationale (SSI)** vocSSI = 7.65 Vitesse en orbite supposée circulaire (km/s) HSSI = 400 Altitude (km) // **véhicule spatial** U = 5 km/s Vitesse éjection des gaz du moteur de propulsion mtot = 700 kg Masse totale initiale (carburant compris) mc = 530 kg Masse carburant au départ // **SOLEIL** KS = 1.33 10^{11} paramètre de gravitation (km^3s^{-2}) // **TERRE** KT = 3.98 10^5 paramètre de gravitation (km^3s^{-2}) RT = 6400 km RAYON de la Terre VOCT = 30 km/s autour soleil vlibT = 11 km/s Vitesse de libération, <u>surface de la terre</u> dTS = 150 10^6 km distance Terre soleil // **MARS** KM = 4.3 10^4 paramètre de gravitation RM = 3400 km RAYON de Mars VOCM = 24 km/s autour soleil vlibM = 5 km/s Vitesse de libération, <u>surface de Mars</u> dMS = 230 10^6 km distance Mars soleil	Remarques : Les grandeurs VOC (vitesse autour du soleil) et vlib (vitesse de libération) pourraient se calculer à partir des K, R, et distances au soleil. **On prend directement les valeurs fournies ici**.

B. Exercice 1 : Orbite circulaire autour de la terre. Atteindre la Station Spatiale Internationale (SSI)

1) La SSI étant supposée décrire une orbite circulaire à **H=400 km** de la terre, quelle est sa vitesse en orbite ?
2) On suppose tout d'abord une fusée qui, une fois lancée, a incliné sa trajectoire pour assurer une mise en orbite d'un vaisseau spatial à une altitude **HT de 200km**, avec une vitesse **vi** perpendiculaire à **ri** de **8,4 km/s**. Le vaisseau a donc été **injecté** au **périgée** (ou à l'apogée, on ne sait pas encore) d'une trajectoire désormais à priori elliptique ! On suppose que ce sera le périgée, donc **vp = vi = 8,4 km/s**



a) Donner les caractéristiques de cette orbite : rayons **rp** (périgée), **ra** (apogée), vitesses **vp** (périgée), **va** (apogée).
b) Que se passe-t-il si la sonde spatiale est injectée à 7 km/s seulement ?
c) Que se passe-t-il si la sonde spatiale est injectée à 11.5 km/s ?
d) Que faire pour rejoindre alors la SSI (sans calculs, et sans parler du Timing de la rencontre) ?

Solution :

1) Vitesse de la station spatiale, orbite supposée circulaire :

vocSSI = $\sqrt{\frac{K_T}{RT+400}}$ = **7,65 km/s** autour de la terre, soit plus de 27000 km/h !

2)

a)

Périgée : **rp** = RT + HT = **6600 km**

Demi grand axe : $a = \frac{KT}{2\frac{KT}{rp} - v_p^2} = \frac{3.98\ 10^5}{2\frac{3.98\ 10^5}{6600} - 8.4^2}$ = **7952.67 km**

Apogée : ra = 2*a – rp = **9305.34 km** > rp Le point de départ est bien le périgée.
Comme rp et ra >= (RT + HT =6600km) donc le vaisseau reste à plus de HT = 200km de la surface de la terre.

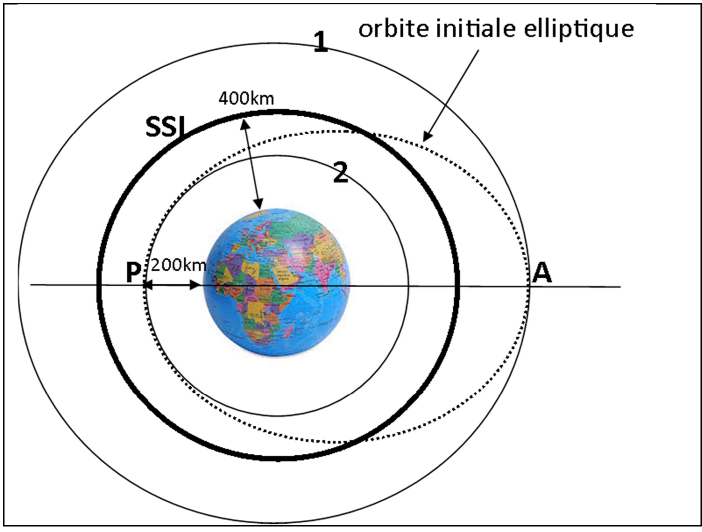
b) Avec v_p = 7km/s : on trouve **a = 5558.19 km**

Donc **ra** = 2*5558 – 6600 = **4516.38** < rp ra est donc ici le périgée et rp l'apogée !
Comme le rayon le plus court, ici ra < RT, **la sonde percute la terre** ! En fait, elle va revient vers la terre, et sans protection particulière se désintègre avec la chaleur due aux frottements dans l'atmosphère. (C'est ainsi qu'on détruit en fait un satellite, ou qu'on débute un retour sur terre !).

c) Avec v_p = 11.5 km/s : **a = -34180** < 0 La trajectoire n'est plus elliptique mais hyperbolique ! On part se balader dans le système solaire en quittant l'attraction terrestre !!!

On peut vérifier :
vitesse de libération de la terre en surface : vlibT = 11 km/s
vitesse de libération à 200 km altitude : $vlib = \sqrt{\frac{2KT}{r}} = \sqrt{2\frac{3.98\ 10^5}{6400+200}}$ = 10.98 km/s
On est au-delà !

d) D'après ce que l'on a vu précédemment, à partir de l'orbite elliptique, deux possibilités s'offrent à nous :



En passant par 1 :
On accélère en A, puis on passe de l'orbite circulaire 1 à la SSI par un transfert de Hohmann, non dessiné ici, voir VI A).

En passant par 2 :
On ralentit en P, puis on passe de l'orbite circulaire 2 à la SSI par un transfert de Hohmann, non dessiné ici , voir VI A).

Il faudrait étudier la solution la plus avantageuse en carburant.

Bien évidemment, à la rencontre de l'orbite de la SSI, il faut que celle-ci soit là ! D'où la nécessité d'un **Timing précis à respecter** ! Sans parler des petits ajustements nécessaires !

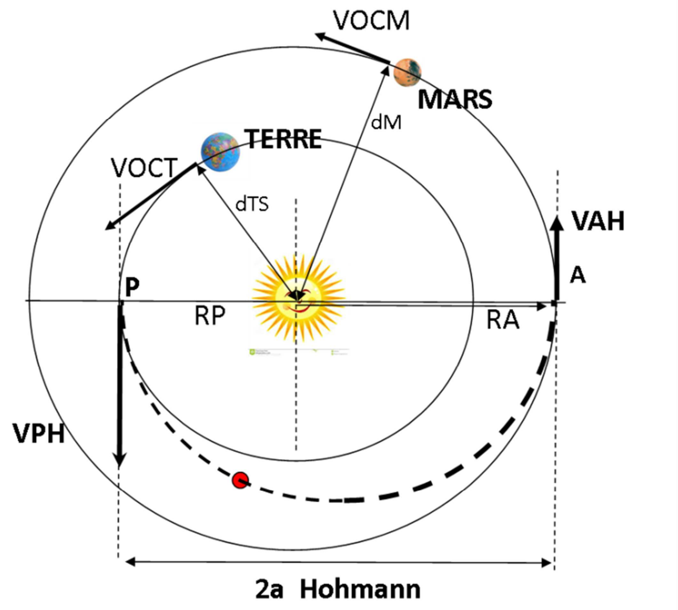
Attention au carburant : si l'on se retrouve en panne sèche, le véhicule devient incontrôlable et suit indéfiniment (ou presque…) une trajectoire non prévue !

C. Exercice 2 : Voyage vers MARS à partir de la station spatiale internationale

La station SSI est à **HSSI = 400 km** de la surface de la terre, elle tourne sur une orbite supposée circulaire à la vitesse : **vocSSI = 7.65 km/s**
Supposons un vaisseau spatial se trouvant côte à côte. On décide de le faire **partir vers Mars** pour le satelliser sur une orbite circulaire à une altitude de **HM = 400km.**

Solution : trois étapes

1) On néglige les diamètres des orbites du vaisseau autour de la Terre et de Mars par rapport aux distances avec le soleil. On peut même négliger les diamètres des zones d'influences des deux planètes. On calcule les **caractéristiques de l'orbite de Hohmann de passage.**
2)



VOCT = 30 km/s
VOCM = 24 km/s

RP = dTS =150 10^6 **RA** = dMS = 230 10^6
2a = RP+RA = 380 10^6 **a** = 190 10^6

Transfert de Hohmann **autour du soleil** (pointillés).

On calcule les vitesses (par rapport au soleil) au départ VPH (périgée) et à l'arrivée VAH (apogée) :

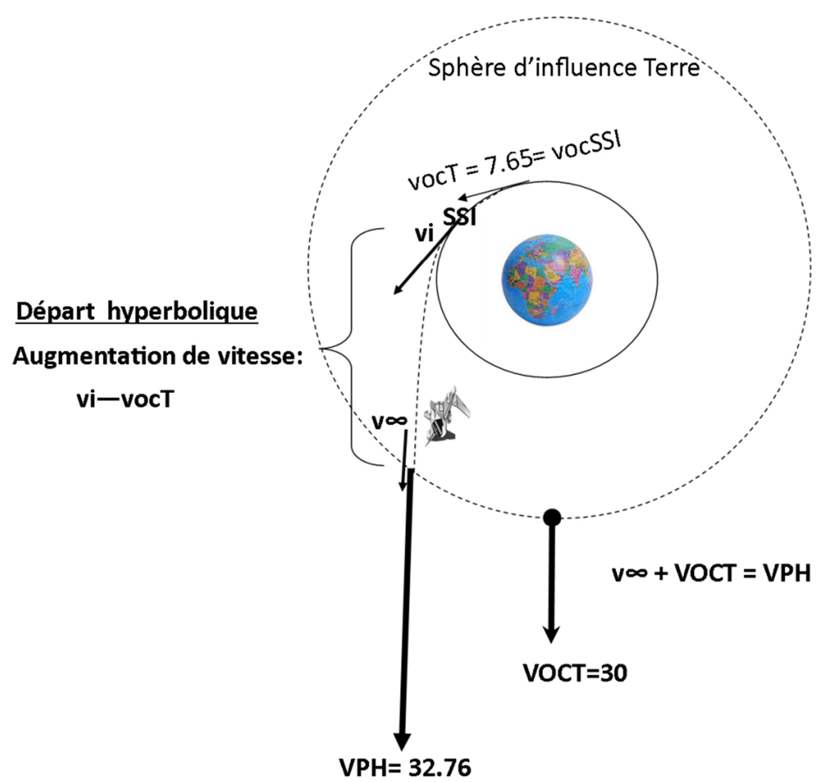
$$\boldsymbol{VPH} = \sqrt{\boldsymbol{KS}\left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{RP}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\right)} = \sqrt{\boldsymbol{1.33\ 10^{11}}\left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{150\ 10^6}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{190\ 10^6}}\right)} = 32.76\ \text{km/s}$$

$$\boldsymbol{VAH} = \frac{\boldsymbol{RP * VPH}}{\boldsymbol{2a - RP}} = \frac{\boldsymbol{150 * 32.76}}{\boldsymbol{380 - 150}} = 21.37\ \text{km/s}$$

Conclusion :
VPH est la vitesse par rapport au soleil que **devra avoir la sonde spatiale en P** après avoir quitté la sphère d'influence de la terre.
VAH est la vitesse par rapport au soleil à laquelle **arrive la sonde en A**.

3) Calcul du départ (en P) de la sonde à partir de la SSI.

La **SSI** est à une altitude **HSSI = 400 km**
Il faut lancer le vaisseau, pour qu'il suive la trajectoire de Hohmann (attraction Soleil, de P vers A) précédente. Pour cela, Il faut **accélérer** pour prendre une **trajectoire hyperbolique par rapport à la terre**, afin de **quitter son attraction** et atteindre la vitesse **VPH** par rapport au soleil.



On s'aide évidemment de la vitesse initiale **vocT = vocSSI** (vitesse de la SSI autour de la Terre). Et on dessine le tout dans le bon sens !

Départ hyperbolique : il faut lancer le vaisseau avec **vi** pour que, une fois sorti de l'attraction terrestre, sa vitesse soit v∞ tel que :
v∞ + VOCT = VPH = 32.76 km/s

Donc :
v∞ = VPH – VOCT = **2.76 km/s**

Puis, on calcule vi :

On a (voir trajectoires hyperboliques) : $\boldsymbol{v_\infty} = \sqrt{\boldsymbol{vi^2} - \frac{\boldsymbol{VlibT^2}}{1+\frac{H}{R}}}$

donc $\boldsymbol{vi} = \sqrt{\boldsymbol{v\infty^2} + \frac{\boldsymbol{VlibT^2}}{1+\frac{HSSI}{RT}}} = \sqrt{2.76^2 + \frac{11^2}{1+\frac{400}{6400}}}$ = **11.02 km/s**
Or vcT = vocSSI (vitesse de la SSI) = 7.65 km/s

Il faut donc accélérer de DV1 = 11.02 - 7.65 = 3.37 km/s

Donc une consommation de carburant de :
$\boldsymbol{Dm1} = mi\ \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{|DV|}{U}}}\right) = 700\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{3.37}{5}}}\right) =$ **343.23 kg**
Carburant restant : **Cr1 =** mc – Dm1 = 530 – 343.23 = **186.77 kg**

4) Le vaisseau spatial suit alors tout seul la ½ ellipse de transfert vers Mars.

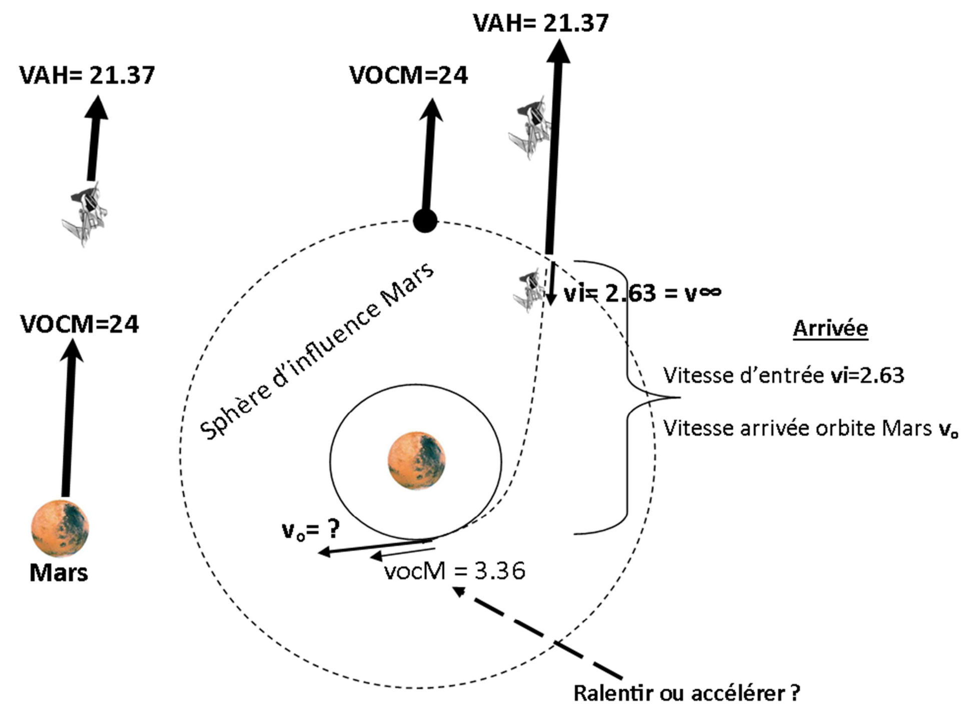
Durée du voyage entre les deux sphères d'influence = Durée du parcours jusqu'à son apogée (A) = demi période = T/2

Période ellipse de Hohmann : $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{KS}}$ avec a = 190 10^6 km KS = 1.33 10^{11}
T = 45121701 s
1 mois = 24*3600*30.5 = 2635200 (mois moyen = 30.5 jours)
T = 17.12 mois T/2 = 8.56
Durée de voyage aller = 8.56 mois.

5) Mise en orbite autour de Mars

Il arrive en A à la vitesse (par rapport au soleil) de : **VAH = 21.37 km/s**
Comme Mars avance autour du soleil plus rapidement **: VOCM = 24 km/s**, ce n'est pas le vaisseau qui rattrapera Mars mais l'inverse : VAH – VOCM = -2.63 km

D'où le dessin ci-dessous dans le bon sens.
Vis-à-vis de Mars, le vaisseau arrive ainsi dans sa sphère d'influence à la vitesse de **vi** = **2.63 km/s**



Le vaisseau arrive à l'entrée de la sphère d'influence de Mars avec une vitesse par rapport à Mars :
vi=VOCM – VAH = **2.63**

C'est la vitesse **v∞** constante, très loin de Mars.
Il suivra donc désormais une trajectoire hyperbolique vers Mars, pour arriver à l'orbite désirée (**HM = 400km** d'altitude) avec la vitesse $\mathbf{v_0}$

Vitesse d'arrivée à l'orbite voulue = $\boldsymbol{v_0} = \sqrt{\boldsymbol{vi}^2 + \frac{\boldsymbol{VlibM}^2}{1+\frac{\boldsymbol{HM}}{\boldsymbol{RM}}}} = \sqrt{2.63^2 + \frac{5^2}{1+\frac{400}{3400}}}$ **= 5.41**

Vitesse nécessaire pour une orbite circulaire à cette altitude :

vocM = $\sqrt{\frac{K_M}{RM+\mathbf{HM}}} = \sqrt{\frac{4.3\ 10^4}{\mathbf{3400+400}}} = 3.36$ km/s

En arrivant vers l'orbite désirée à 400km d'altitude, Il faut donc **ralentir** de :
DV2 = 5.41 – 3.36 = **2.05 km/s**

Donc une consommation de carburant de :
Masse initiale : mi = mtot – Dm1 (après l'accélération déjà effectuée au départ) = 700 – 343.23 = 356.77 kg
Carburant restant précédent = 186.77 kg
Nouvelle variation de masse Dm2 :

$\boldsymbol{Dm2} = mi\ \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{|DV|}{U}}}\right) = 356.77\ \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2.05}{5}}}\right) = \mathbf{120.00\ kg}$

Carburant restant : **cr2 =** 186.77 – 120.00 **= 66.77 kg**

6) ALLER PLUS VITE (10 % à 20 % peut-être, cela pourrait se faire en prenant une ellipse <u>plus au large</u> que la trajectoire d'Hohmann, le vaisseau arriverait à l'orbite de Mars plus tôt, mais on consommerait énormément plus de carburant !!! Des moteurs bien plus performants sont à l'étude actuellement.